1.5.9 Největší společný dělitel

Předpoklady: 010508

Pedagogická poznámka: Největším společným dělitelem se zabýváme až v druhé části hodiny od příkladu 4.

Př. 1: Rozhodni, zda uvedená čísla patří mezi prvočísla.
a) 323 b) 397 c) 899 d) 943

a) 323
$\sqrt{323} < \sqrt{400} < 20 \Rightarrow$ Nemá cenu zkoušet prvočísla větší než 19.
2, 3, 5 $\Rightarrow$ není dělitelné podle znaků dělitelnosti.
$323 : 7 = 4...$
43
$\Rightarrow$ není dělitelné 7,
$323 : 11 = 2...$
103
$\Rightarrow$ není dělitelné 11,
$323 : 13 = 2...$
83
$\Rightarrow$ není dělitelné 13,
$323 : 17 = 19...$
153
0
$\Rightarrow$ číslo $323 = 17 \cdot 19$ není prvočíslo.

b) 397
$\sqrt{397} < 20 \Rightarrow$ Nemá cenu zkoušet prvočísla větší než 19.
2,3,5,7,11,13,17,19 - nejde $\Rightarrow$ číslo 397 je prvočíslo.

c) 899
$\sqrt{899} < 30 \Rightarrow$ Nemá cenu zkoušet prvočísla větší než 29.
2,3,5,7,11,13,17,19, 23, - nejde
Číslo 899 není prvočíslo, protože $899 = 29 \cdot 31$.

d) 943
$\sqrt{943} < 31 \Rightarrow$ Nemá cenu zkoušet prvočísla větší než 29.
2,3,5,7,11,13,17,19, - nejde
Číslo 943 není prvočíslo, protože $943 = 23 \cdot 41$.

Př. 2: Mezi prvočísly se vyskytují dvojice „prvočíselných dvojčat“ – prvočísel $p, p+2$ lišících se o 2. Jaký je společný dělitel čísel $p+1$ ležících mezi nimi?

Mezi prvočísly do 50 jsou to dvojice:
5, 7 11, 13 17, 19 29, 31 41, 43
Číslo mezi nimi je dělitelné 6.
$p, p+1, p+2$ - trojice čísel jdoucích po sobě.

- krajní jsou lichá $\Rightarrow$ $p+1$ je sudé,
- krajní nejsou dělitelná 3 $\Rightarrow$ $p+1$ je dělitelné třemi,

$\Rightarrow$ $p+1$ je dělitelné šesti.

Prvočísla mají velký význam pro šifrování, například asymetrická šifra RSA je založena na tom, že:

- součin prvočísel jde spočítat snadno (šifrování),
- rozklad součinu na prvočísla je pomalý (rozšifrování).

Př. 3: Rozhodni s pomocí kalkulačky, zda je číslo 9945656597 prvočíslo.

Číslo 9945656597 je také prvočíslo. Můžeme si to ověřit například dotazem "isprime 9945656597" na Wolfram Alpha.
Dělení všemi prvočísly menšími než 99 727 je i na kalkulačce poměrně zdlouhavé.

Pedagogická poznámka: Že číslo 9945656597 je prvočíslem, není na většině běžných kalkulaček možné ověřit pouhým dělením, protože výsledek po dělení třemi přesahuje počet míst na displeji a tváří se jako celý. U prvočísel menších než deset je tedy nutné dělitelnost čísla 9945656597 ověřovat pomocí zpětného násobení nebo pomocí znaků dělitelnosti (ciferný součet $9+9+4+5+6+5+6+5+9+7=65 \Rightarrow$ číslo dělitelné třemi není). Každopádně diskusi se vyhýbám a jdu dále.

Pedagogická poznámka: Pokud chcete nechat žáky, aby se pokusili samostatně sestavit pravidla (příklady 7 v této a 5 v následující hodině), je nutné psát prvočíselné rozklady s mocninami.

Př. 4: Při satelitním snímkování je potřeba zachytit obdélníkové území o stranách 18 km a 24 km. Satelit snímá povrch Země ve formě čtvercových fotografií o libovolné velikosti strany. Urči, jak pokrýt zmiňované území co nejmenším počtem co největších čtverců.

Hledáme co největší číslo, které dělí 18 i 24.

$D(18)=\{1,2,3,6,9,18\}$

$D(24)=\{1,2,3,4,6,8,24\}$

Největší společný dělitel je 6 $\Rightarrow$ území rozdělíme na 12 čtverců 6 km x 6 km.

Píšeme: $D(18,24)=6$, čteme **největší společný dělitel** 18 a 24 je 6.

Jak hledat rychleji než ze všech dělitelů (u některých čísel jich je hodně)?
Přes prvočíselný rozklad:

- $18=2\cdot 3^2=2\cdot 3\cdot 3$
- $24=2^3\cdot 3=2^2\cdot 2\cdot 3$

Společné je $2\cdot 3=6$

Největšího společného dělitele je možné hledat i pro více čísel najednou.

Př. 5: Najdi $D(36,48,60)$.

- $36=2^2\cdot 3^2=2^2\cdot 3\cdot 3$
- $48=2^4\cdot 3=2^2\cdot 2^2\cdot 3$

- $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$D(36, 48, 60) = 2^2 \cdot 3 = 12$

Př. 6: Najdi $D(140,168,210)$.

- $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$
- $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 7$
- $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$D(140,168,210) = 2 \cdot 7 = 14$

Př. 7: Zformuluj větu, která definuje postup nalezení největšího společného dělitele čísel *a*, *b*, *c*. Postup musí vycházet z prvočíselného rozkladu čísel.

Největším společným dělitelem čísel *a*, *b*, *c* je součin těch prvočísel, která se vyskytují v prvočíselných rozkladech všech tří čísel. U každého prvočísla použijeme nejvyšší mocninu, která se vyskytuje ve všech prvočíselných rozkladech.

Pedagogická poznámka: Řešení studentů se budou lišit, je třeba společně rozebrat, co je ještě dobře a co není (na to stačí předvádět hloupého robota, který rozumí jen základním operacím). Chyby si mohou nejdříve hledat navzájem a publikovat až společnou práci. Je možné spojovat vícekrát (nejdříve dvojice dohromady, pak čtveřice, …) podle času. Nedoporučuji říkat dopředu, že budou pravidlo publikovat společně (sousedé lepších žáků to ihned vzdávají).

Kdy se hodí hledání největšího společného dělitele?
Při krácení zlomků hledáme největšího společného dělitele čitatele a jmenovatele, abychom ho pak mohli vykrátit.

Shrnutí: Při krácení zlomků potřebujeme $D(a,b)$ (společné prvočinitele).